M 70 CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — OPTION P' — 1978 — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Epreuve de MATHEMATIQUES I ( 1 page de texte )

*Les candidats qui ne seraient pas en mesure de répondre à des questions dont les résultats sont donnés peuvent continuer le problème en admettant ces résultats.*

## I

1- Montrer que l'équation à l'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

$$z = \operatorname{tg} z \qquad (1)$$

a une infinité de solutions réelles positives ( au sens large), qui sont les termes d'une suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$n\pi \leqslant \omega_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$$

De l'étude de l'équation à l'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$x + iy = \operatorname{tg}(x+iy)$$

déduire que (1) n'a pas de racine complexe non réelle.

2- Soit l'équation différentielle :

$$v''(x) + \omega^2 v(x) = 0 \qquad (2)$$

où $\omega \in \mathbb{C}$ est donné, et où $v$ est une application inconnue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Montrer que (2) a des solutions non nulles vérifiant la condition :

$$v(0) = 0 \; ; \quad v'(1) = v(1) \qquad (3)$$

si, et seulement si, $\omega$ est une racine de l'équation (1).
Lorsque la condition est remplie, expliciter les solutions de (2) vérifiant (3).

3- On pose : $v_0(x) = x$ et, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $v_n(x) = \sin(\omega_n x)$.
Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$, calculer $h_{m,n} = \int_0^1 v_m(x)v_n(x)dx$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer : $k_n = \int_0^1 v_n^2 dx$ . (On demande des expressions de $h_{m,n}$ et $k_n$ ne faisant intervenir aucune ligne trigonométrique de $\omega_n$)

4- Représenter graphiquement les restrictions à $[0,1]$ de $v_0$, $v_1$ et $v_2$ ; on précisera les demi-tangentes aux extrémités des arcs obtenus.

## II

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et E"le sous-espace de E constitué par les $f \in E$ qui sont de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifient en outre la condition :

$$f(0) = 0 \; ; \; f'(1) = f(1).$$

Soit $K$ l'application de $[0,1]\times[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par :

$$K(x,y) = e^y.\operatorname{sh} x \text{ si } x \leqslant y \; ; \; K(x,y) = e^x \operatorname{sh} y \text{ si } y \leqslant x.$$

1- Montrer qu'à toute application $f \in E$ on peut associer une application $F$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par

$$F(x) = \int_0^1 K(x,y)\, f(y)dy \qquad (4)$$

Vérifier que cette application $F$ appartient à $E$" et que, en outre : $F'' = F - f$ .
(Tous les calculs intermédiaires, et, en particulier, une expression de $F'(x)$, doivent figurer sur la copie.)

2- On note $\Phi(f)$ la fonction $F \in E$" associée à $f \in E$ comme il vient d'être dit au 1-
Montrer que $\Phi$ est une application linéaire et bijective de $E$ sur $E$".
La restriction $\varphi$ de $\Phi$ à $E$" est ainsi un endomorphisme de $E$". Est-ce un automorphisme ?
Montrer que les valeurs propres de $\varphi$ sont les éléments d'une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ; pour $n \in \mathbb{N}$ donné, quelles sont les applications propres associées à $\lambda_n$ ?

3- A tout couple $(n,f) \in \mathbb{N} \times E$, on associe le réel

$$a_n(f) = \frac{1}{k_n} \int_0^1 v_n(x)f(x)dx$$

où $v_n$ et $k_n$ ont la même signification que dans la partie I.

a) $F$ désignant toujours $\Phi(f)$, exprimer $a_n(f)$ au moyen de $a_n(F)$ et de $\omega_n$.

b) Etant donné $f \in E$" [illegible], que peut-on dire de la convergence de la série de terme général $a_n(f)$ ?
On pourra utiliser la borne supérieure $M$ de $|f''|$ sur $[0,1]$.

## III

On reprend les notations des questions précédentes.

1- Montrer que si $S$ est une série numérique réelle absolument convergente, de terme général $s_n$, alors, pour tout $x \in [0,1]$, la série de terme général $s_n.v_n(x)$ est convergente, ce qui permet d'associer à $S$ l'application $g_S$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par :

$$g_S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k.v_k(x)$$

La théorie de la convergence uniforme des séries de fonctions permet de démontrer que cette application est continue; on admettra ce résultat.

2- $\mathcal{S}$ désignant l'ensemble des séries réelles absolument convergentes, montrer que $\mathcal{E} = \{ g_S \mid S \in \mathcal{S} \}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

3- Soient une série $S \in \mathcal{S}$ et l'application associée $g_S$.

a) Calculer les réels $a_n(g_S), n \in \mathbb{N}$, en fonction des termes de $S$. Il sera commode d'écrire pour $p \in \mathbb{N}$ :
$g_S(x) = \sum_{k=0}^{p} s_k.v_k(x) + r_{S,p}(x)$.

b) On se place dans le cas où $a_n(g_S)$ est nul pour tout $n \in \mathbb{N}$; Que peut-on dire de l'application $g_S$ ?

ooooooo

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail